Modell zur objektiven Bestimmung von Konzentrationsrisiken

Sven Fischer, Sparkasse Chemnitz

Die Instrumente zur Ermittlung der Risiken einzelner Kredite sind in jüngster Vergangenheit erheblich erweitert und verbessert worden. Mit Hilfe unterschiedlicher Rating- und Scoringsysteme ist es heute problemlos möglich, die Bonität einzelner Schuldner spezifischer Klassen zu bestimmen. Die Rating-Klassen der Sparkassen-Masterskala sind den Mitarbeitern zwischenzeitlich in Fleisch und Blut übergegangen. Sie sind aus dem Alltagsgeschäft nicht mehr wegzudenken. Eine neue Herausforderung stellen dagegen die Bestimmung des portfoliobezogenen Kreditrisikos und die damit im Zusammenhang stehenden Konzentrations- bzw. Klumpenrisiken dar.

Inhalt

Wenngleich intuitiv klar ist, was unter Konzentrationsrisiken allgemein zu verstehen ist, bereiten konkrete Abgrenzungen Schwierigkeiten. Sie sind oft subjektiv geprägt und erschöpfen sich in vagen alltagssprachlichen Umschreibungen. All diesen Erläuterungen ist gemein, dass es sich bei Konzentrationsrisiken um eine stark überdurchschnittliche Größenordnung handelt, die sich von der Gesamtheit abhebt. Gewöhnliche Veränderungen wie ein Ausfallereignis haben, wenn sie bei einem Konzentrationsrisiko wirksam werden, überproportionale Auswirkungen auf das gesamte Portfolio. Damit ist klar, dass bei der Begriffsbestimmung von Konzentrationsrisiken stets Bezug auf das Portfolio genommen werden muss. Ziel ist daher, auf Grundlage jener Intuition ein Modell zu entwerfen, das es ermöglicht,

- objektive Abgrenzungskriterien für den Begriff Konzentrationsrisiken zu finden,
- die Konzentrationsrisiken zu überwachen.

Das Modell sollte zudem überschaubar und einfach in der Handhabung sein.

Das Grundmodell

Der Grundgedanke eines solchen Modells beschreibt die Prozesse

- einer standardisierten Aufbereitung der wesentlichsten Informationen des Einzelfalls,
- der Bewertung des Einzelfalls,
- einer sukzessiven Zusammenfassung der standardisierten Einzelinformationen zu einem Portfoliomodell.

Dabei wird grundsätzlich unterstellt, dass das Ausfallverhalten der Kredite voneinander unabhängig ist.

Für die konkrete Aufbereitung der wesentlichen Informationen des Einzelfalls werden die Kreditinformationen auf zwei auch im Rahmen der Konditionierung maßgebliche Kennziffern reduziert sowie die Kredite jeweils nur durch ein qualitatives und ein quantitatives Merkmal beschrieben. Die auf Grundlage des Ratings ermittelte Ausfallwahrscheinlichkeit ist dazu prädestiniert, die Funktion des qualitativen Merkmals wahrzunehmen. Als quantitatives Merkmal kann beispielsweise das unbesicherte Kreditvolumen, der Exposure at Default (EAD) oder der Kreditäquivalenzbetrag herangezogen werden. Von allen anderen Kreditspezifika wird abstrahiert.

Eine Standardisierung für das qualitative Merkmal Bonität in Form der Ratingklassen liegt bereits vor. Um auch das quantitative Merkmal zu standardisieren, wird das Portfolio in Größenklassen zerlegt. Wird der quantitative Parameter größenklassengerecht gegliedert, können die Kredite eindeutig in ein Teilportfolio, also eine Masche im Netz aus Ratingklassen- und Größenklassenzerlegung, eingeordnet werden. Von den Teilportfolien ist neben den beiden beschreibenden Merkmalen nun lediglich noch die Zahl der ihnen zugeordneten Kredite von Interesse. Das Kreditportfolio wird damit durch eine Menge standardisierter Teilportfolien approximiert. Bezeichnet man mit r die Zahl der Ratingklassen und mit g die der Größenklassen, ist das Portfolio mit r * g natürlichen Zahlen vollständig beschrieben.

Portfolio-Verteilungen

Das Ausfallverhalten eines Single-Portfolios, also eines nur aus einem einzigen Kredit bestehenden Kreditbestands, kann durch die Binomialverteilung beschrieben werden, die in diesem Spezialfall eine 0-1-Verteilung ist. Die Kredite innerhalb eines der skizzierten Teilportfolien sind gleichartig, und ihr Ausfallverhalten ist annahmegemäß unabhängig voneinander. Somit kann das Binomialverteilungsmodell auf das gesamte Teilportfolio übertragen werden. Damit ist für die r * g-Teilportfolien gleichartiger Kredite jeweils eine Funktion für die Verlustverteilung bestimmbar. Mit Hilfe dieser Verteilungsfunktion kann für beliebige Vertrauensbereiche („Konfidenzniveau“) der Value at Risk (VaR) bzw. der unerwartete Verlust analytisch bestimmt werden.

Die Wahrscheinlichkeiten, dass genau k Kredite des Teilportfolios mit n Krediten, die alle die gleiche Ausfallwahrscheinlichkeit p haben, nicht mehr bedient werden können, bestimmt sich nach der Formel

$$P(X=k)=\binom{n}{k}*p^{k}*(1-p)^{n-k}$$

mit dem Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!*(n-k)!}$

Ein Beispiel veranschaulicht diesen Zusammenhang.

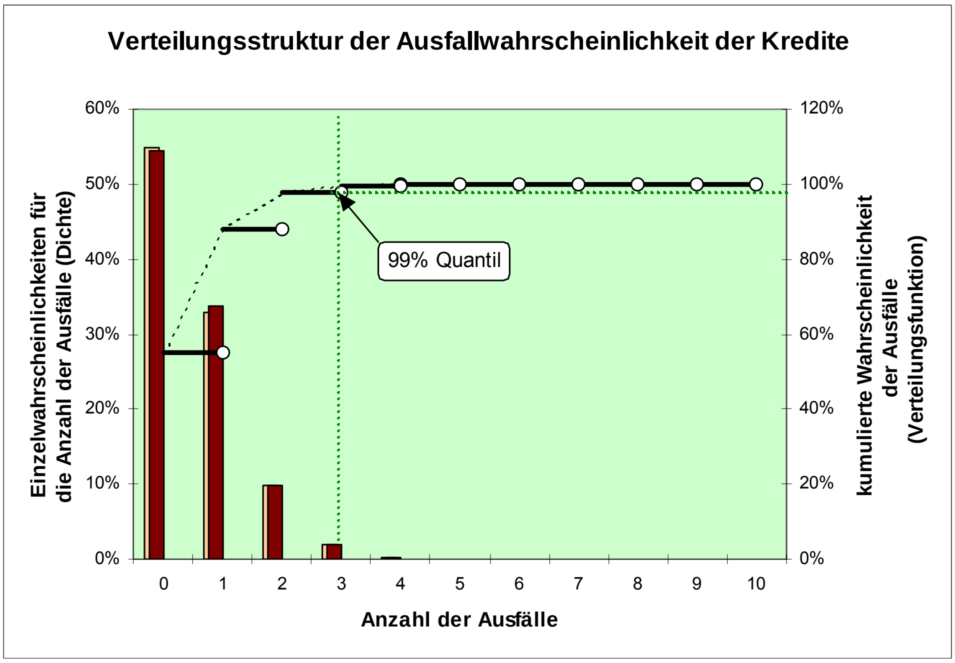


Abbildung 1

Aus der Abbildung 1 ist ersichtlich, dass mit einer Wahrscheinlichkeit von 55% kein Kredit, mit einer Wahrscheinlichkeit von 34% ein Kredit ausfällt. Zudem besagt die Graphik, dass mit einer Wahrscheinlichkeit von 99% maximal drei Kredite, dies entspricht der Obergrenze des 99 -%- Konfidenzintervalls, ausfallen. Durch Multiplikation der zahlenmäßigen Werte mit dem quantitativen Merkmal des Teilportfolios werden die entsprechenden betragsmäßigen Werte, unter anderem auch der Value at Risk, ermittelt.

Vereinfacht wird das weitere Verfahren wesentlich, wenn die Binomialverteilung durch eine Poissonverteilung ersetzt wird. Diese Approximation ist weder von existenzieller Bedeutung noch beeinflusst sie bei kleinen Ausfallwahrscheinlichkeiten die Ergebnisse wesentlich. Zur Veranschaulichung ist die Poissonverteilung in unserem Beispiel in Form von Schattensäulen hinter der Binomialverteilung dargestellt. Die Wahrscheinlichkeit, dass genau k Kredite des Teilportfolios mit n Krediten, die alle die gleiche Ausfallwahrscheinlichkeit p haben, ausfallen, errechnet sich mit der Poissonverteilung nach der Formel

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} * e^{-\lambda} \qquad \text{wobei } \lambda = n*p \text{ ist.}$$

Im nächsten Schritt werden die Teilportfolien unterschiedlicher Bonitäten jeweils einer Größenklasse zusammengefasst. Mit Hilfe der so genannten charakteristischen Funktion und unter Verwendung des Multiplikationssatzes lässt sich zeigen, dass für die Teilportfolien gleich großer Kredite, die sich lediglich hinsichtlich der Ausfallwahrscheinlichkeit unterscheiden, die folgende Beziehung gilt. Auch dabei wird vorausgesetzt, dass das Ausfallverhalten der einzelnen Kredite voneinander unabhängig ist. Die Formel

$$P(X_{(s)} = k) = \frac{\lambda_s^k}{k!} * e^{-\lambda_s} \qquad \text{für } k=0, 1, \ldots$$

$$s=1, \ldots, r \text{ (r: Anzahl der Ratingklassen)}$$

beschreibt die Verlustverteilungen der Teilportfolien einer fixierten Größenklasse mit den Parametern $\lambda_s=n_s*p_s$, wobei n_s die Anzahl der Kredite der Ratingklasse s und p_s die Ausfallwahrscheinlichkeit der Ratingklasse s darstellen.

In diesem Fall gilt für die Verlustverteilung der gesamten Größenklasse die Formel

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} * e^{-\lambda} \qquad k=0,1, \ldots \text{ mit } \lambda = n_1*p_1 + \ldots + n_r*p_r.$$

Diese Gleichung beschreibt wiederum eine Poissonverteilung. Damit verbleiben g Funktionen zur Beschreibung der Verlustverteilung und des

VaR für bonitätsmäßig heterogene Teilportfolien, die sich hinsichtlich ihrer Größenklassenzuordnung unterscheiden. Der letzte Aggregationsschritt zur Zusammenfassung aller Größenklassen des Gesamtportfolios kann wegen der unterschiedlichen Volumengewichtung der Ausfallereignisse nicht analog zu der Zusammenfassung der unterschiedlichen Bonitäten erfolgen.

Die größenklassenbezogen aggregierten Verlustverteilungen werden im Folgenden über die einzelnen Wahrscheinlichkeiten beschrieben. Dazu werden die Einzelwahrscheinlichkeiten der aggregierten Größenklassen berechnet. Das Verfahren ist kaskadenartig. Den Anfang macht die größte Klasse, wobei die jeweils nächstkleineren Klassen sukzessive überlagert werden. In unserem Modell stellen $p^{(A)}_k = P(X^{(A)} = k)$ und $p^{(B)}_l = P(X^{(B)} = l)$ die Einzelwahrscheinlichkeiten der Verlustverteilungen der bonitätsbezogen aggregierten Teilportfolien A und B dar. Die Größenklassen A und B unterscheiden sich dabei um den Faktor $\alpha \in \mathbf{N}$. Zudem sei d eine Zahl mit $P(X^{(A)}<d) = 0$ und $P(X^{(B)}<d) = 0$.

Mit $Ü_\alpha [X^{(A)},X^{(B)}]$ wird die Überlagerung der Verteilung der Zufallsgröße $X^{(A)}$ mit der von $X^{(B)}$ ab Punkt d mit dem Versatz α bezeichnet, wobei für die Einzelwahrscheinlichkeiten die Formel

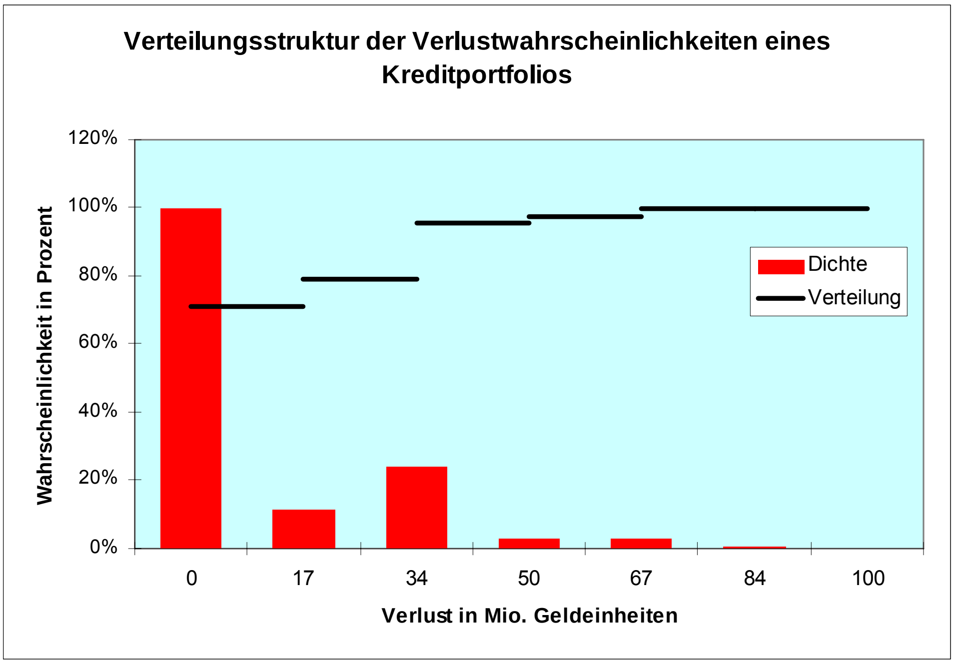
$$P(Ü_\alpha [X^{(A)}, X^{(B)}] = k) = \sum_{i=d}^{[k/\alpha]} p_i^{(A)} * p_{k-i*\alpha}^{(B)}$$ mit [.] : Ganzzahloperator, gilt.

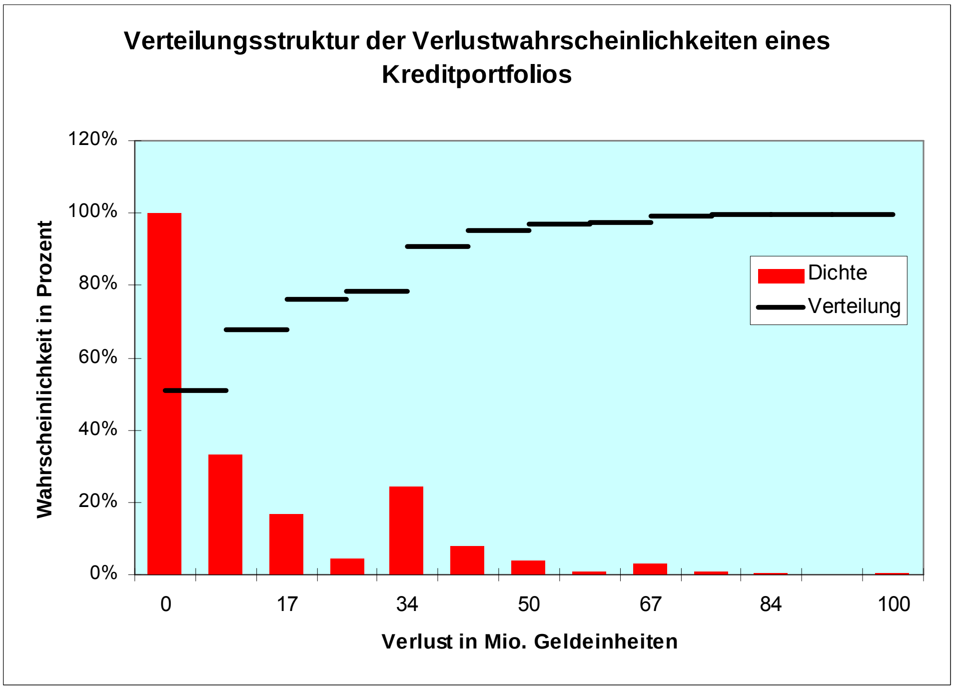
Die Überlagerung ist eine Spezifikation der aus der Statistik bekannten Faltung. Für die Funktion $F_{Ü_\alpha}(t) = P(Ü_\alpha [X^{(A)}, X^{(B)}] < t)$ lässt sich zeigen, dass $F_{Ü_\alpha}(-\infty) = 0$ und $F_{Ü_\alpha}(\infty) = 1$ sowie, dass $F_{Ü_\alpha}(\cdot)$ monoton nicht fallend und linksseitig stetig ist. Das bedeutet, dass die durch die Überlagerung der Verteilungen der Zufallsgrößen $X^{(A)}$ und $X^{(B)}$ erzeugte Funktion wiederum eine Verteilungsfunktion ist.

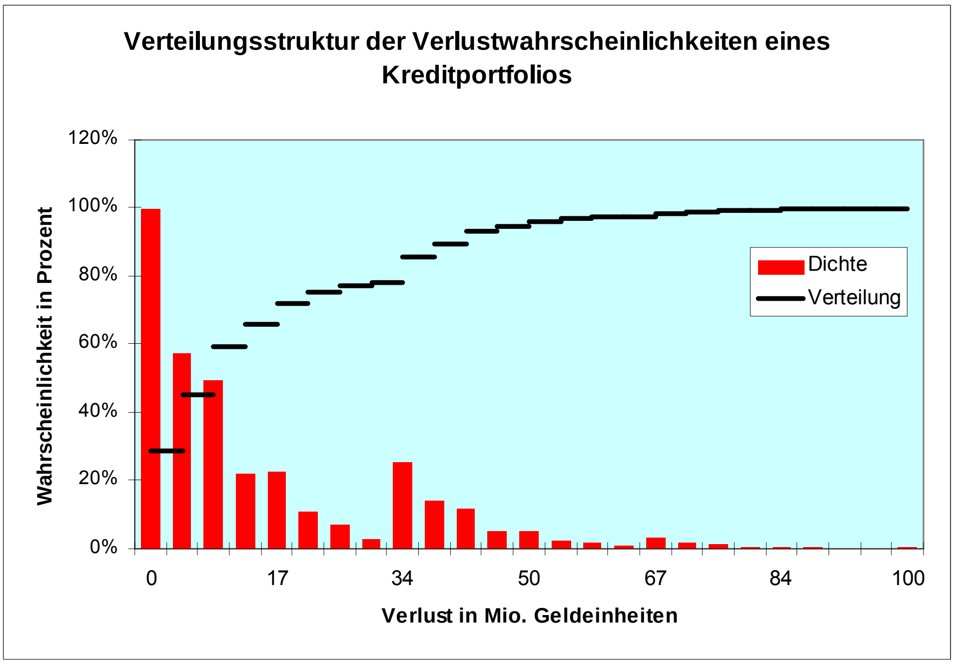
Berechnung des Value at Risk

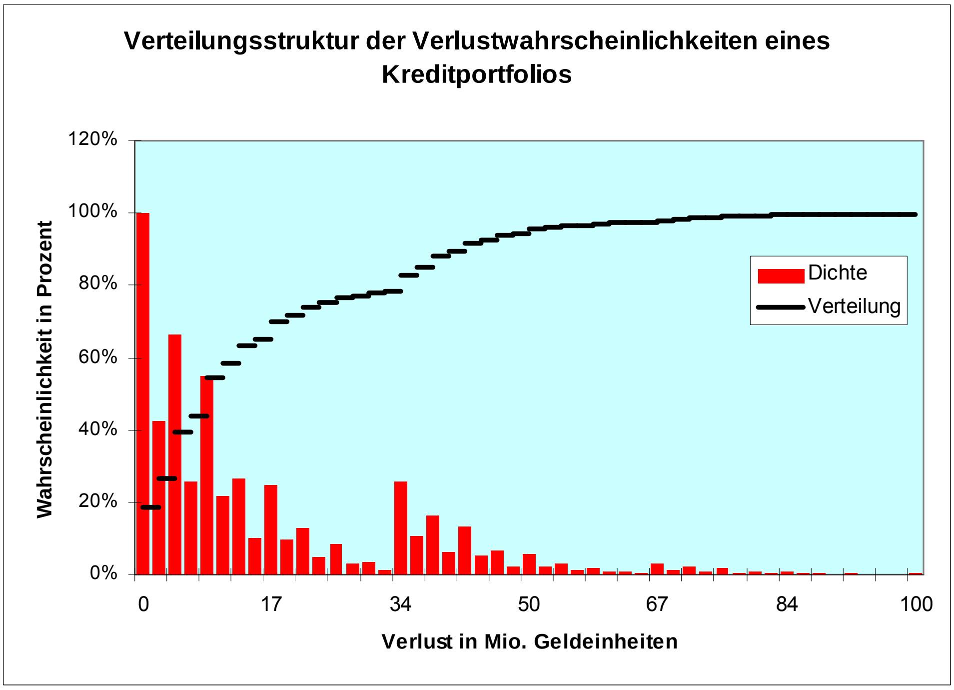
Mit dem Überlagerungsmodell steht ein analytisches Modell zur Beschreibung der Ausfallverteilung des Portfolios zur Verfügung. Die betragsmäßige Verlustverteilung und der Value at Risk ergeben sich durch Multiplikation der sich aus der Überlagerung ergebenden Verteilungsfunktion mit dem Volumenparameter der kleinsten aggregierten Größenklasse.

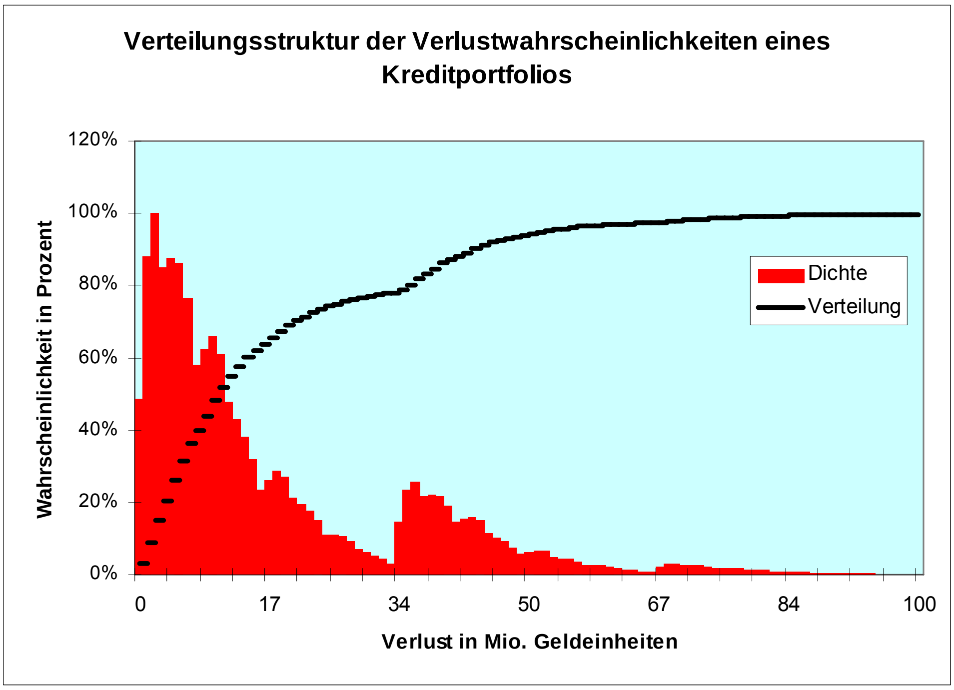
Die Abbildung 2 (ff.) veranschaulicht die sukzessive Entwicklung des Modells anhand eines fiktiven Kreditportfolios unter Verwendung der Parameter d=0 und α=2. Zur Bestimmung der Überlagerung der Verteilungen der Zufallsgrößen $X^{(A)}$ und $X^{(B)}$ sind lediglich deren Einzelwahrscheinlichkeiten erforderlich. Explizite Vorschriften über die Dichte- bzw. Verteilungsfunktion werden dagegen nicht benötigt.



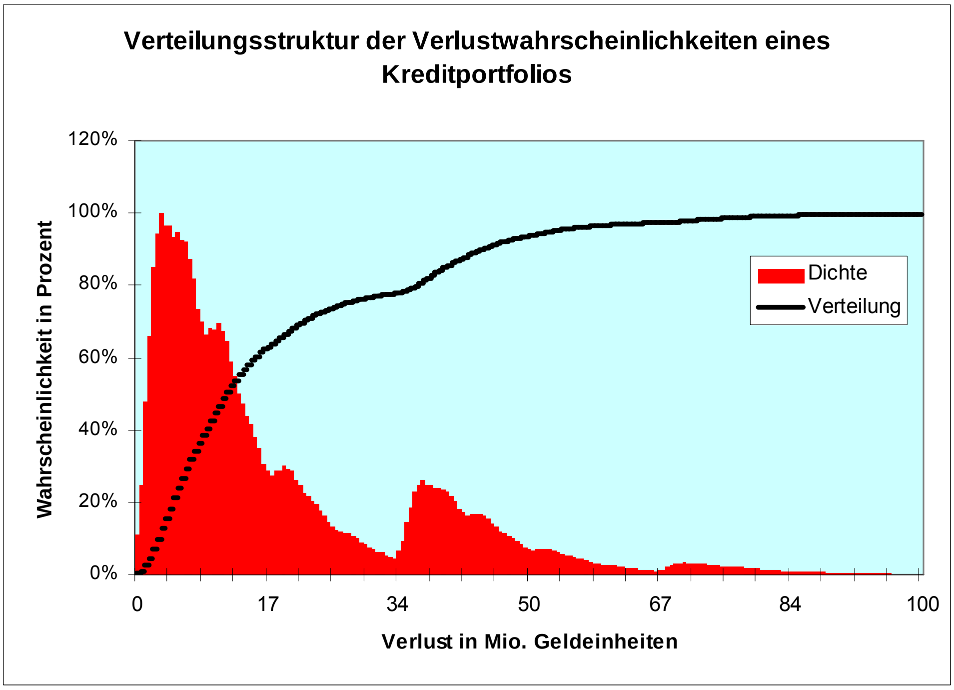



Verteilungsstruktur der Verlustwahrscheinlichkeiten eines Kreditportfolios
120%
100%
80%
60%
40%
20%
0%
Wahrscheinlichkeit in Prozent
Dichte
Verteilung
0
17
34
50
67
84
100
Verlust in Mio. Geldeinheiten


Verteilungsstruktur der Verlustwahrscheinlichkeiten eines Kreditportfolios
120%
100%
80%
60%
40%
20%
0%
Wahrscheinlichkeit in Prozent
Dichte
Verteilung
0
17
34
50
67
84
100
Verlust in Mio. Geldeinheiten



Verteilungsstruktur der Verlustwahrscheinlichkeiten eines Kreditportfolios
Wahrscheinlichkeit in Prozent
120%
100%
80%
60%
40%
20%
0%
0
17
34
50
67
84
100
Verlust in Mio. Geldeinheiten
Dichte
Verteilung



Verteilungsstruktur der Verlustwahrscheinlichkeiten eines Kreditportfolios
Wahrscheinlichkeit in Prozent
120%
100%
80%
60%
40%
20%
0%
0
17
34
50
67
84
100
Verlust in Mio. Geldeinheiten
Dichte
Verteilung

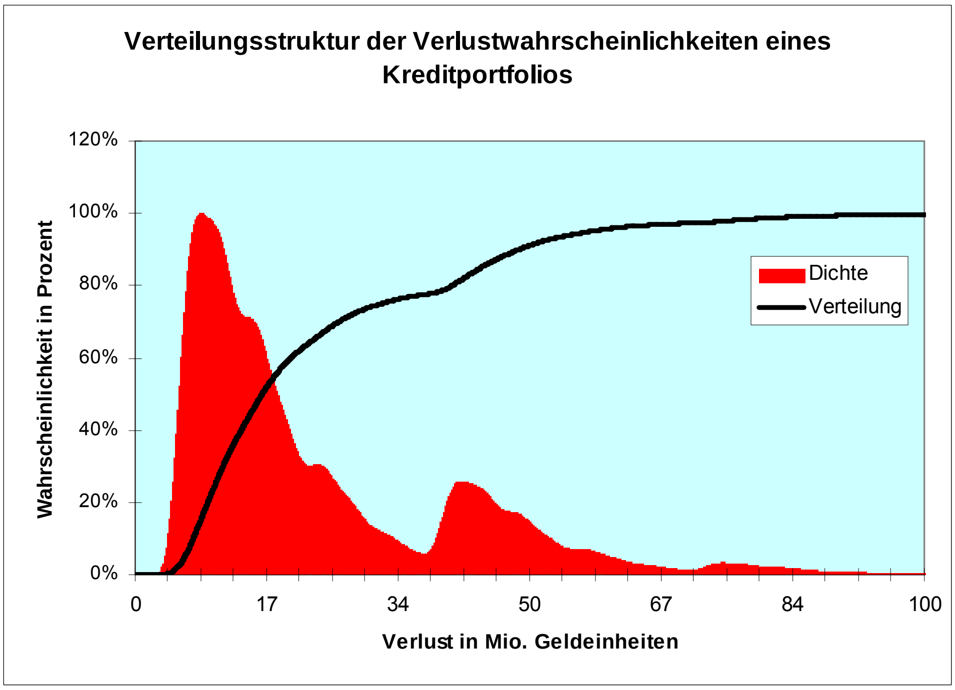


Abbildung 2

Mit Hilfe des Value at Risk können Abgrenzungskriterien und eine Kennzahl für die Intensität von Konzentrationsrisiken bestimmt werden. Zur Beschreibung der Wirkung eines Kredits aus einem Teilportfolio wird dessen individueller Beitrag zum VaR errechnet. Dies geschieht, indem die VaR-Veränderung des Portfolios bei Erhöhung bzw. Reduzierung des betrachteten Teilportfolios um einen Kredit berechnet wird. Diese Veränderung entspricht dem *absoluten* VaR-Beitrag dieser Position.

Um die Vergleichbarkeit der Konzentrationsintensität zwischen Positionen zu gewährleisten, die sich sowohl in den qualitativen als auch quantitativen Parametern unterscheiden, ist es zweckmäßig, einen *relativen* VaR-Beitrag zu ermitteln. Dies kann beispielsweise dadurch geschehen, dass der absolute VaR-Beitrag ins Verhältnis gesetzt wird zu einer Größe, die die damit verbundene Portfolioänderung repräsentiert. Dafür ist es zweckmäßig, die mit der durchschnittlichen Portfolioausfallwahrscheinlichkeit (Central Tendency) gewichtete Volumenänderung heranzuziehen. Der relative VaR-Beitrag verkörpert die gesuchte Kennzahl für die Einflussintensität eines Kredits im entsprechenden Teilportfolio auf den Value at Risk des gesamten Portfolios bzw. die Portfoliodiversifikation.

Aufgrund der vorgenommenen Gewichtung können Werte des relativen VaR-Beitrages um den Wert 1 als neutral betrachtet werden. Bei kleineren Werten leisten die entsprechenden Positionen einen Diversifizierungsbeitrag. Bei größeren Werten wird die Diversifikation beeinträchtigt und ab einem bestimmten Schwellenwert können diese Beeinträchtigungen als Konzentrationsrisiken interpretiert werden. Dieser Schwellenwert ist individuell festzulegen.

Praktische Anwendung

Wie kann das hier verwandte Verfahren praktisch veranschaulicht werden? Durch die Zerlegung des fiktiven Portfolios entsteht eine Matrix, deren Elemente die Anzahl der einzelnen Krediten des jeweiligen Teilportfolios beschreiben. Für das fiktive Portfolio wurde der Value at Risk beispielhaft für das Konfidenzniveau 99% errechnet. Nacheinander wurde das Portfolio jeweils in einem Teilportfolio um einen Kredit erhöht und die Value at Risks der vergrößerten Portfolios ermittelt. Die Differenzen zum ursprünglichen Value at Risk, also der absoluter VaR-Beitrag, wurden bestimmt und ins Verhältnis zum Central-Tendency-gewichteten Volumen der Veränderungen gesetzt. Die so ermittelten relativen VaR-Beiträge sind in Tabelle 1 aufgelistet. Die grün unterlegten Positionen markieren die Schwelle, bei der der Value at Risk neutral auf Portfolio-Erweiterungen reagiert. Rechts bzw. unterhalb der grünen Markierung steigt die Intensität von Portfolio-Vergrößerungen in der Wirkung auf den Value at Risk an. Unter Verwendung der gewählten Kennzahl lässt sich nun exakt festlegen, welche Positionen als Konzentrationsrisiken zu interpretieren sind und wie stark deren Konzentrationsintensität ist. Insgesamt erlaubt die vergleichsweise einfache Handhabung und die Transparenz des Modells neben der Definition von Konzentrationsrisiken auch deren Überwachung. Auf den ersten Blick ist ablesbar, welche Konsequenz beispielsweise Neugeschäft in bestimmten Teilportfolien oder Ratingveränderungen bei größeren Engagements auf den Value at Risk nach sich ziehen.

Volumen-cluster	Ratingklassen													
	1 (AA+)	. . .	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
. . .	. . .		. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
2^{20}	0,0		0,0	0,0	0,0	0,4	0,4	0,4	**0,9**	**1,3**	2,2	3,0	4,3	6,1
2^{21}	0,0		0,0	0,2	0,2	0,2	0,4	0,7	**0,9**	**1,5**	2,2	3,3	5,0	6,5
2^{23}	0,0		0,1	0,1	0,2	0,3	0,5	**0,8**	**1,1**	1,7	2,5	3,8	5,6	7,6
2^{24}	0,0		0,1	0,1	0,2	0,3	0,4	**0,7**	**1,1**	1,7	2,7	4,3	7,2	10,5
2^{25}	0,0		0,2	0,3	0,4	0,6	**0,9**	**1,4**	2,0	3,1	4,9	7,4	12,0	13,9

Tabelle 1