

Skalierung von Konfidenzniveaus bei der Value-at-Risk Schätzung von Marktpreisrisiken

Prof. Dr. Stefan Reitz

Inhalt

Modellierung von Risikofaktoren	1
Modellierung von Tails.....	4
Beispielrechnungen.....	5
Fazit und Ausblick	8

Die Messung und Steuerung von Marktpreisrisiken erfolgt in zahlreichen Instituten mit einem Value-at-Risk (VaR) Ansatz. Die heutzutage verwendeten VaR-Modelle gehen nach wie vor von der Annahme einer Normalverteilung für Risikofaktoren (= Änderung der bewertungsrelevanten Marktparameter) aus.

Seit ein paar Jahren ist jedoch bekannt, dass extreme Verluste in der Realität der Finanzmärkte wesentlich häufiger vorkommen, als es unter der Hypothese einer Normalverteilung zu erwarten ist. Dies führt auf die Problematik, dass insbesondere bei der Modellierung extremer Verluste, wie sie im Zuge der anhaltenden Finanzkrise vermehrt zu beobachten sind, im Kontext von Risikotragfähigkeitskonzepten eine signifikante Unterschätzung von potenziellen Verlusten vorliegen kann.

Im vorliegenden Artikel beschäftigen wir uns mit der Frage, inwieweit die in der Praxis anzutreffende normalverteilungsbasierte Umrechnung von VaR-Zahlen mit vorgegebenem Konfidenzniveau auf VaR-Zahlen mit höheren Konfidenzniveaus adäquat ist und wie mögliche Alternativen aussehen könnten. Dabei bedienen wir uns einer vergleichsweise einfachen Modellierung der Randbereiche (= Tails) der Risikofaktorverteilungen, die auf den Überlegungen der Extremwertstatistik beruhen.

Den Anstoß für diese Überlegungen resultiert unter anderem aus der aufsichtlichen Prüfungspraxis bei Instituten, die in jüngster Zeit verstärkt auf die quantitativen Methoden der Risikotragfähigkeitsrechnung fokussiert ist.

☰ Modellierung von Risikofaktoren

Bekanntlich ist der VaR eines Portfolios derjenige durch Marktdatenänderungen verursachte potenzielle Verlust, der am Ende einer angenommenen Haltedauer T , während der ein Portfolio unverändert bleibt, mit einer vorgegebenen (geringen) Wahrscheinlichkeit $1-\alpha$ nicht überschritten wird.



In der Sprache der Statistik handelt es sich beim VaR um das $1-\alpha$ - Quantil der Verteilung aller zufälligen Gewinne oder Verluste am Ende der Haltedauer. Die Zahl α wird auch als Konfidenzniveau bezeichnet.

Bezeichnet S_t den Wert eines Marktparameters zum Betrachtungszeitpunkt t (z.B. ein Zinssatz, ein Credit-Spread, ein Wechselkurs oder ein Aktienkurs), so definiert man den zugehörigen Risikofaktor $R_{t,t+1}$ üblicherweise als tägliche relative oder absolute Änderung von S_t , also

$$R_{t,t+1} = \frac{S_{t+1} - S_t}{S_t} \quad \text{bzw.} \quad R_{t,t+1} = S_{t+1} - S_t.$$

Statt der relativen Änderung betrachtet man auch die logarithmische Änderung

$$R_{t,t+1} = \ln\left(\frac{S_{t+1}}{S_t}\right) \approx \frac{S_{t+1} - S_t}{S_t},$$

die den Vorteil hat, dass sie im Zeitablauf additiv ist (ebenso wie die absolute Änderung):

$$\begin{aligned} R_{0,T} &= \ln\left(\frac{S_T}{S_0}\right) = \ln(S_T) - \ln(S_0) \\ &= \ln(S_T) - \ln(S_{T-1}) + \ln(S_{T-1}) - \ln(S_{T-2}) \pm \dots + \ln(S_1) - \ln(S_0) \\ &= R_{T-1,T} + R_{T-2,T-1} + \dots + R_{0,1}. \end{aligned}$$

Unterstellen wir nun eine Normverteilung des Risikofaktors, und betrachten wir eine Risikoposition in einem Finanzinstrument, dessen Wert V_t linear vom Marktparameter S_t abhängt (im einfachsten Beispiel $V_t = n \cdot S_t$, wenn S_t den Kurs einer Aktie bezeichnet, und das Portfolio aus n Stücken der Aktie besteht), so gilt für den $\text{VaR}_{\alpha,T}$ zum gegebenen Konfidenzniveau α und Haltedauer T die folgende Beziehung:

$$\begin{aligned} \text{VaR}_{\alpha,T} &= q_{1-\alpha}(V_T - V_0) = q_{1-\alpha}(n \cdot (S_T - S_0)) \\ &= n \cdot S_0 \cdot q_{1-\alpha}\left(\frac{S_T - S_0}{S_0}\right) \approx n \cdot V_0 \cdot q_{1-\alpha}(R_{0,T}), \end{aligned}$$

wobei hier $q_{1-\alpha}$ das $1-\alpha$ - Quantil der vorliegenden Zufallsvariablen bezeichnet und $R_{0,T}$ die logarithmische Änderung des Marktparameters darstellt. Ist $R_{0,T}$ die absolute Änderung des Marktparameters, so gilt entsprechend

$$\text{VaR}_{\alpha,T} = q_{1-\alpha}(V_T - V_0) = q_{1-\alpha}(n \cdot (S_T - S_0)) = n \cdot q_{1-\alpha}(R_{0,T}).$$

In allen Fällen läuft die VaR-Berechnung also letztlich auf die Bestimmung des $1-\alpha$ - Quantils hinaus, welches für normalverteilte Risikofaktoren gemäß

$$q_{1-\alpha}(R_{0,T}) = \sigma \cdot \sqrt{T} \cdot q_{1-\alpha}(N(0,1))$$

zu bestimmen ist. Dabei ist σ die Standardabweichung (Volatilität) des Risikofaktors und $N(0,1)$ die Standardnormalverteilung.

Die zuletzt genannte Formel erlaubt die in der Praxis üblichen Umrechnungen des VaR auf andere Konfidenzniveaus und andere Haltedauern. Ausgehend vom Konfidenzniveau 95% erhalten wir beispielsweise

$$VaR_{95\%,T} = \sqrt{T} \cdot VaR_{95\%,1},$$

$$VaR_{99\%,T} = \sqrt{T} \cdot \frac{q_{0.99}(N(0,1))}{q_{0.95}(N(0,1))} \cdot VaR_{95\%,1} \approx \sqrt{T} \cdot 1,414 \cdot VaR_{95\%,1}, \quad (1)$$

wobei T hier die Haltedauer in Tagen bezeichnet.

Die in (1) angewendeten „Skalierungsformeln“ für den VaR gelten nur unter der Annahme des Vorliegens täglich unabhängiger Risikofaktoren $R_{t,t+1}$ mit identischer Normalverteilung im Zeitablauf (Stationarität).

Tatsächlich ist es jedoch so, dass die in der Realität zu beobachtende Verteilung der Risikofaktoren (z. B. Renditen) regelmäßig von der Normalverteilung abweicht. Typischerweise ist die empirische Verteilung stärker leptokurtisch, d.h. die Wölbung im Zentrum der Verteilung ist stärker ausgeprägt und die Flanken sind dicker (so genannte Fat Tails). Kleine und sehr große Renditen haben eine größere und mittlere Renditen eine geringere Wahrscheinlichkeit als bei einer Normalverteilung.

Zum Beispiel ergibt sich aus der Normalverteilung für eine negative Abweichung um mehr als 4 Standardabweichungen vom Mittelwert eine extrem kleine Wahrscheinlichkeit von etwa 1 zu 30.000, d.h. mit einem solchen Ereignis wäre nur alle 120 Jahre (zu je 250 Handelstagen) zu rechnen. Beim DAX entsprechen 4 Standardabweichungen bei einer geschätzten Tagesvolatilität von 1,46% (Zeitraum 26.11.1990 bis 08.09.2011) einem Tagesverlust von 5,84%. Dieser Wert wurde seit dem 26.11.1990 insgesamt 18 Mal überschritten – ein klares Indiz gegen die Normalverteilungshypothese! Die bekannten Schwächen bei der statistischen Modellierung von Verlusten, versucht man in der Praxis vor allem durch Anwendung von Stresstesting-Szenarien auszugleichen.

Als Erklärung für die Abweichung empirischer Finanzdaten-Verteilungen von der Normalverteilung wird häufig die sog. Heteroskedastizität, also das Vorliegen von Volatilitätsschwankungen an den Märkten, herangezogen. Die Volatilitäten der Risikofaktoren sind im Zeitablauf nicht stabil, so dass die o.g. Stationaritätsannahme als nicht erfüllt angesehen werden muss. Betrachtet man etwa die Aktienmärkte, so ist regelmäßig eine Clusterbildung beobachten, d.h. es wechseln sich unruhige Marktphasen mit großen Preisschwankungen und ruhigere Phasen mit relativ kleinen Schwankungen ab. Die Fat Tails erklären sich daraus, dass sich die Häufigkeit größerer Ausschläge in den unruhigen Phasen überproportional erhöht.

☰ Modellierung von Tails

Die Modellierung extremer Ereignisse fällt in das Gebiet der sog. Extremwerttheorie. Es wird dabei versucht, die Verteilungsfunktion einer Zufallsgröße X , also die Funktion $F(x) = P(X \leq x)$, für besonders große (oder besonders kleine) Werte von x parametrisch zu beschreiben und aus beobachteten Daten statistisch zu schätzen.

Vereinfacht gesprochen zeigt sich dabei, dass die empirisch beobachtete Verteilungsfunktion in den Randbereichen häufig die Gestalt einer Polynomfunktion hat, und damit sehr viel langsamer abfällt als die Verteilungsfunktion einer Normalverteilung (diese fällt exponentiell in den Tails ab). Verfolgen wir diese Überlegung weiter, so ergibt sich der folgende Ansatz für die Verteilungsfunktion eines Risikofaktors $R_{0,T}$ im Randbereich der Verteilung:

$$P(R_{0,T} \leq -r) = b \cdot r^{-a} \quad (r > 0), \quad (2)$$

wobei a und b aus vorliegenden Risikofaktorzeitreihen zu bestimmen sind. Es ist a der sog. Tail-Index.

Zur praktischen Berechnung von a und b bietet sich eine Umformung von (2) an.

$$\ln(P(R_{0,T} \leq -r)) = \ln(b) - a \cdot \ln(r),$$

Aus dieser Beziehung wird sofort klar, dass eine lineare Regression der beiden Größen $\ln(P(R_{0,T} \leq -r))$ und $\ln(r)$ für die Randbereiche der Risikofaktorverteilung (also für Werte von $-r$, die z.B. kleiner als das 1%-Quantil der Risikofaktorzeitreihe sind) statistische Schätzwerte für a und b liefern.

Sind a und b bestimmt, so können wir weiter rechnen

$$\begin{aligned} P(R_{0,T} \leq q_{1-\alpha}(R_{0,T})) = 1 - \alpha &\Leftrightarrow b \cdot (-q_{1-\alpha}(R_{0,T}))^{-a} = 1 - \alpha \\ &\Leftrightarrow q_{1-\alpha}(R_{0,T}) = -\left(\frac{b}{1-\alpha}\right)^{1/a}. \end{aligned}$$

Somit lässt sich der VaR eines Finanzinstruments mit Wert $V_t = n \cdot S_t$ zum Konfidenzniveau α und zur Haltedauer T wie folgt berechnen (bei Verwendung von logarithmischen bzw. absoluten Änderungen als Risikofaktoren):

$$\begin{aligned} VaR_{\alpha,T} = n \cdot V_0 \cdot q_{1-\alpha}(R_{0,T}) &= -n \cdot V_0 \cdot \left(\frac{b}{1-\alpha}\right)^{1/a} \quad \text{bzw.} \\ VaR_{\alpha,T} = n \cdot q_{1-\alpha}(R_{0,T}) &= -n \cdot \left(\frac{b}{1-\alpha}\right)^{1/a}. \quad (3) \end{aligned}$$

Aus Formel (3) ergibt sich unmittelbar der folgende Skalierungsfaktor zur Umrechnung von VaR-Zahlen für zwei verschiedene Konfidenzniveaus α_1 und α_2 (größer als 99%):

$$\frac{VaR_{\alpha_1,T}}{VaR_{\alpha_2,T}} = \left(\frac{1-\alpha_2}{1-\alpha_1} \right)^{1/a}$$

Im Fall $\alpha_1 = 99,95\%$ und $\alpha_2 = 99\%$ (ein für die Praxis relevanter Fall des Hochskalierens der Risikozahlen auf ein gewünschtes sehr hohes Konfidenzniveau für die Risikotragfähigkeitsrechnung) und für typische Werte von a (im Bereich von 2 bis 6; vgl. auch den nachfolgenden Abschnitt) ergeben sich folgende Skalierungsfaktoren (zum Vergleich: Der Normalverteilungs-Skalierungsfaktor ist hier bei 1,414):

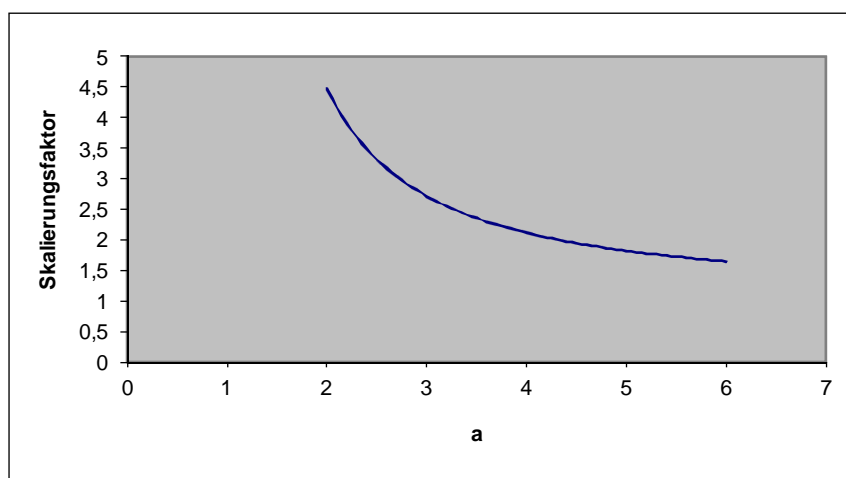


Abbildung 1: Skalierungsfaktor in Abhängigkeit von a

Der Skalierungsfaktor liegt also in allen relevanten Fällen über dem Skalierungsfaktor aus der Normalverteilung, teilweise um ein Vielfaches.

☰ Beispielrechnungen

Wir betrachten beispielhaft einige wichtige Risikofaktorarten, um die Anwendung der dargestellten Sachverhalte zu erläutern.

Die Vorgehensweise ist dabei stets die gleiche: Ausgehend von einer Zeitreihe historisch beobachteter Risikofaktoren $R_{t,t+1}$ berechnen wir zunächst die Werte $P(R_{0,1} \leq -r)$, sortieren die historisch beobachteten Werte $R_{t,t+1}$ der Größe nach und bestimmen durch Abzählen den Anteil der Werte unterhalb von $-r$, verwenden dies als Schätzwert für $P(R_{0,1} \leq -r)$ und führen sodann eine lineare Regression der beiden Größen $\ln(P(R_{0,1} \leq -r))$ und $\ln(r)$ für alle Werte von $-r$ unterhalb des 1%-Quantils durch.

Nachfolgende Ergebnisse werden für den Zeitraum 20.12.2006 bis 02.02.2011 erzielt:

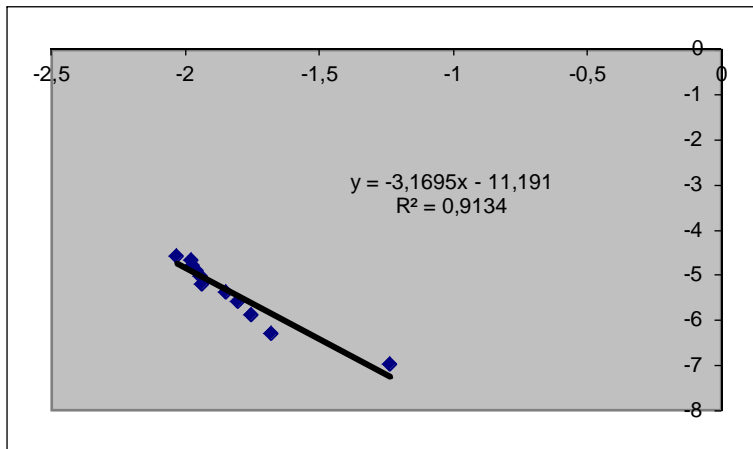


Abbildung 2: lineare Regression für 2y-EUR Swap-Satz, $x = \ln(r)$, $y = \ln(P(R_{0,1} \leq r))$,
 $R^2 =$ Bestimmtheitsmaß, $a = 3,16905$

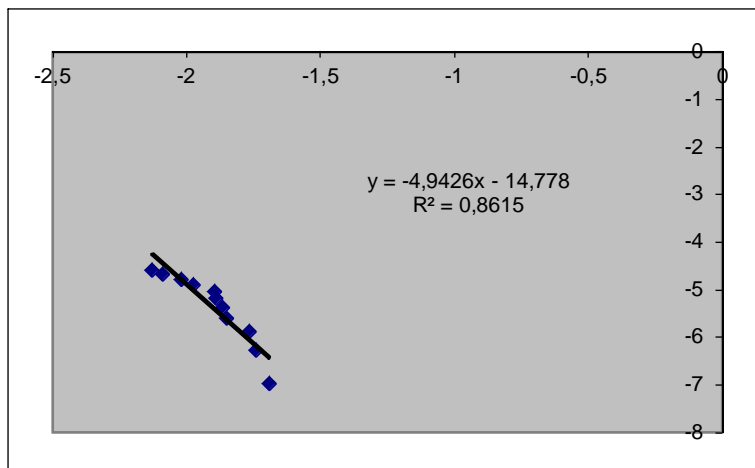


Abbildung 3: lineare Regression für 5y-EUR Swap-Satz, $x = \ln(r)$, $y = \ln(P(R_{0,1} \leq r))$,
 $R^2 =$ Bestimmtheitsmaß, $a = 4,9426$



Abbildung 4: lineare Regression für EUR/USD, $x = \ln(r)$, $y = \ln(P(R_{0,1} \leq r))$, $R^2 =$ Bestimmtheitsmaß, $a = 6,2829$

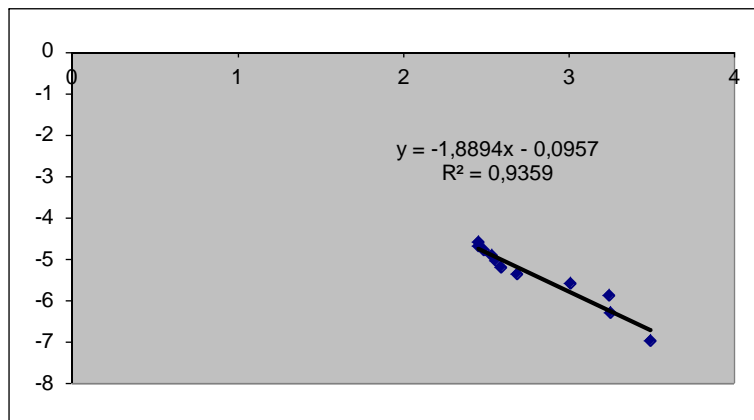


Abbildung 5: lineare Regression für iTraxx Europe, $x = \ln(r)$, $y = \ln(P(R_{0,1} \leq -r))$, $R^2 =$ Bestimmtheitsmaß, $a = 1,8894$

Die Skalierungsfaktoren von $\text{VaR}_{0,99}$ zu $\text{VaR}_{0,9995}$ (eintägige Haltedauer) wären in den genannten Beispielen 2,57 bzw. 1,83 bzw. 1,61 bzw. 4,88 (bei Normalverteilungsannahme jeweils 1,414).

Legt man bei der linearen Regression allerdings nicht nur die 1% negativsten Risikofaktoren zu Grunde, sondern die 5% negativsten, so ergeben sich die Skalierungsfaktoren 2,43 bzw. 2,24 bzw. 1,91 bzw. 3,26.

Für den DAX betrachten wir eine Risikofaktorzeitreihe vom 26.11.1990 bis 08.09.2011 und erhalten für alle Werte von $-r$ unterhalb des 1%-Quantils folgende lineare Regression:

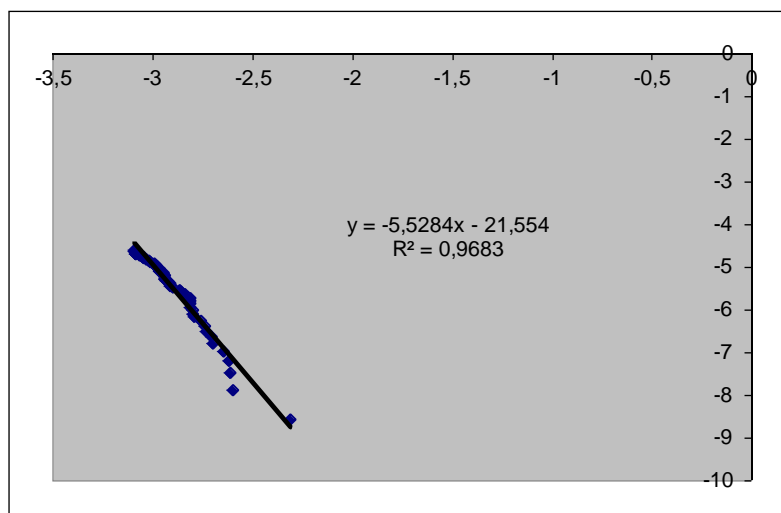


Abbildung 6: lineare Regression für DAX, $x = \ln(r)$, $y = \ln(P(R_{0,1} \leq -r))$, $R^2 =$ Bestimmtheitsmaß, $a = 5,5284$

Dies entspricht einem Skalierungsfaktor von 1,72. Bezieht man die 5% negativsten Renditen in die Betrachtung mit ein, so ergibt sich der Wert 2,65 (wiederum im Vergleich zu 1,414 bei Normalverteilungsannahme).

☰ Fazit und Ausblick

Die Skalierung von VaR-Zahlen im Bereich hoher Konfidenzniveaus ist unter der Normalverteilungsannahme problematisch, da die Empirie zeigt, dass die Tails von Risikofaktorenteilungen deutlich von der Normalverteilungsform abweicht. Eine brauchbare Approximation der Tails wird durch den Polynomialansatz geliefert, der sich aus den Ergebnissen der Extremwerttheorie ableiten lässt. Die entsprechenden Parameter resultieren aus einer linearen Regression und führen zu Skalierungen der VaR-Zahlen von $VaR_{0,99}$ zu $VaR_{0,9995}$ (eintägige Haltedauer), die teilweise deutlich über der Vergleichszahl 1,414 für die Normalverteilung liegen.

Allerdings sind die erzielten Resultate stark davon abhängig, wie lange die verwendete Zeitreihe ist bzw. welchen Tail-Bereich der Verteilung der Schätzung zu Grunde gelegt wird (in unseren Beispielen 1%-Tail und 5%-Tail). Diese Effekte sind typisch bei der Verwendung von Schätzmethoden aus der Extremwerttheorie. Eine statistisch „saubere“, aber deutlich aufwendigere Schätzung im Rahmen der Extremwerttheorie würde die Schätzung des Schwellenwertes u , ab dem die Risikofaktoren in die Regression mit aufgenommen würden, mit beinhalten.